SESSION DE 1988

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classes terminale C et terminale E)

DURÉE : 5 heures

Le problème I et les exercices II, III, IV sont indépendants

PROBLÈME I

N, p, n sont des entiers naturels non nuls.

On considère un tableau rectangulaire T ayant n lignes numérotées de 1 à n et p colonnes numérotées de 1 à p.

Pour i variant de 1 à n et k variant de 1 à p, on inscrit à l'intersection de la ligne de rang i et de la colonne de rang k un entier a_{ik} compris, au sens large, entre 1 et N, c'est-à-dire vérifiant les inégalités $1 \leqslant a_{ik} \leqslant N$.

Soit E_i *l'ensemble* des entiers figurant dans la ligne de rang i.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Question 1

Dans cette question on impose au tableau T les deux conditions suivantes :

1. Pour i variant de 1 à n E_i a exactement p éléments;
2. Pour deux rangs distincts quelconques i et j, les ensembles E_i et E_j sont différents.

Soit m la plus petite valeur de N permettant de constituer, pour des valeurs données de n et de p, un tableau T satisfaisant aux deux conditions précédentes.

a. Calculer m pour $n = p + 1$.

b. Calculer m pour $n = 10^{30}$ et $p = 1988$.

c. Déterminer la limite de $\dfrac{m^p}{n}$ lorsque, p étant fixé, n tend vers l'infini.

Question 2

Dans cette question on impose, au tableau T, à la place des conditions précédentes, les deux conditions suivantes :

1. $p = n$;
2. Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (i, k) tel que $i + k \leqslant n$, l'entier a_{ik} n'appartient pas à l'ensemble E_{i+k}.

a. Montrer que, pour i et j distincts, les ensembles E_i et E_j sont différents.

b. Montrer que si n est supérieur ou égal à 2^q, q étant un entier positif non nul, alors N est supérieur ou égal à $q + 1$.

c. On suppose que $n = 2^r - 1$, r étant un entier non nul donné.

Montrer que l'on a : $N \geqslant r$. Montrer que l'on peut effectivement construire un tel tableau pour $N = r$.

EXERCICE II

Déterminer, pour n entier positif, le signe de $n^6 + 5\,n^5 \sin n + 1$.

Pour quels entiers positifs n l'inégalité $\dfrac{n^2 + 5n\cos n + 1}{n^6 + 5n^5 \sin n + 1} \geqslant 10^{-4}$ est-elle vérifiée ?

EXERCICE III

On considère deux sphères Σ_1 et Σ_2 et une droite ne les rencontrant pas.

Pour $i = 1$ et $i = 2$ on désigne par C_i le centre de Σ_i, par H_i la projection orthogonale de C_i sur Δ, par r_i le rayon de Σ_i et par d_i la distance de C_i à Δ.

Soit M un point de Δ et, pour $i = 1$ et $i = 2$, T_i le point de contact avec Σ_i d'un plan tangent à Σ_i passant par M ; on pose $\delta_i(M) = MT_i$.

Situer M sur Δ de façon que la quantité $\delta_1(M) + \delta_2(M)$ soit minimum.

EXERCICE IV

Dans le plan on considère un cercle C et cinq points distincts M_1, M_2, M_3, M_4, M situés sur C.

Montrer que le produit des distances de M aux droites $(M_1 M_2)$ et $(M_3 M_4)$ est égal au produit des distances de M aux droites $(M_1 M_3)$ et $(M_2 M_4)$.

Que peut-on en déduire pour $(2n + 1)$ points distincts $M_1, M_2, \ldots, M_{2n}, M$ situés sur C ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail